

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES
=====

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES MIXTES

THESE

Présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

Pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques 3^e cycle)

par

Michel Isambert

soutenue le 25 Juin 1958 devant la Commission d'examen

Jury : MM. J.DELSARTE
M.HERVE
JL.LIONS

Président

Examineurs

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES MIXTES

THESE

Présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

Pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques 3^e cycle)

par

Michel Isambert

soutenue le 25 Juin 1958 devant la Commission d'examen



Jury : MM. J. DELSARTE

M. HERVE

JL. LIONS

Président

Examineurs

UNIVERSITE de N A N C Y - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : E. URION

Assesseur : M. ECHEVIN

Doyens honoraires : MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE.

Professeurs honoraires : MM. DARMOIS E, GUTTON, CROZE, DARMOIS G, RAYBAUD, FALLOT, LAFFITE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, De-MALLEMANN, LONGCHAMBON.

Maîtres de Conférences honoraires. MM. RAUX, LIENHART,

- P R O F E S S E U R S -

MM. CORNUBERT	Chimie organique	BARRIOL	Chimie théorique
CHEVALLIER	Physique	N....	Physique appliquée.
URION	Chimie biol.	BIZETTE	Physique
DELSARTE	Analyse sup.	GUILLEN	Electronique
REMY	Z ologie	GIBERT	Génie chimique
ROUBAULT	Géologie	HERVE	Calcul diff. et intég.
N...	Chimie minér.	LEGRAS	Mécanique rationnelle
GUERIN	Chimie ind.	CHAPELLE	Physique
N....	Chimie phys. él.	DAVID	Chimie Biol.
VEILLET	Biologie anim.	BOLFA	Minéralogie
N ...	Math. appliquées	NICLAUSE	Chimie
ECHEVIN	Botanique	FAIVRE	Phys. appliquée
WAHL	Chim. org. ind.		

M A I T R E S de C O N F E R E N C E S

WERNER	Botanique	DUVAL	chimie	KERN	minér.
AUBRY	chimie	SADRAN	Géochimie	WEPPE	minér.appl.
FRUHLING	Radiotechnique	CHAPON	Chim. biol.	BERNARD	Géologie
GAYET	Physiologie	HADNI	Physique	LHERMUSIAUX	
COMOLET	Mécan. phys.	ROIZEN	Physique		Physi.app.
MANGENOT	Phytopathologie	HILLY	Géol. de la Lorraine	ARAGNOL	M.P.C.
LIONS	M.M.P.	MALAPRADE	Chimie	<u>Secrétaire</u>	
GARNIER	Agronomie	REGNIER	Chimie minér.		
BRUHAT	Maths. géné.	LE GOFF	Génie chim.	M. LAPOINTE.	
COPPENS	Radiogéologie				

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma
profonde gratitude à Monsieur J.L. LIONS pour les
Conseils qu'il m'a constamment prodigués et pour
les multiples améliorations dont ce mémoire lui est
redevable.

Je remercie aussi les Professeurs qui
ont bien voulu me faire l'honneur de composer le
Jury .



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555808_0030

UNE CLASSE DE PROBLÈMES MIXTES

I. - Rappel sur la transformation de Laplace d'une distribution

1) Produit d'une distribution par des exponentielles

Soient $X^n = \mathbb{R}^n$, un espace vectoriel réel à n dimensions,
 $\Pi^n = \Xi^n + i \Xi^n$ l'espace vectoriel à n dimensions complexes construit canoniquement sur Ξ^n dual de X^n
 ($\Xi^n = \mathbb{R}^n$).

Soit $T \in \mathcal{D}'_X$ une distribution sur X^n , l'ensemble des
 $p = \xi + i\eta \in \Pi^n$, pour lesquels $\exp(-px) T \in \mathcal{F}'_X$ est
 un "cylindre" $\Gamma + i \Xi^n$, défini pour $\xi \in \Gamma$, où Γ est
 un ensemble convenable de Ξ^n .

L'application : $(\eta, S) \longrightarrow \exp(-i\eta x) S$ de
 $(\Xi^n \times S)$ dans $\mathcal{F}'$ est continue.

On démontre que Γ est convexe.

2) Espace $\mathcal{F}'_X(\Gamma)$

C'est l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'_X$ telles que
 $\exp(-\xi x) T \in \mathcal{F}'_X$ quel que soit $\xi \in \Gamma$ (Γ évidemment
 convexe dans $\mathbb{R}^n = \Xi^n$). On retrouve l'espace $\mathcal{F}'_X$ usuel
 pour $\Gamma = \{0\}$.

On munit $\mathcal{F}'_X(\Gamma)$ de la topologie suivante :
 des $T_j \in \mathcal{F}'_X(\Gamma)$ convergent vers 0 si quel que soit
 $\xi \in \Gamma$ les $\exp(-\xi x) T_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{F}'_X$
 ($\implies \exp(-px) T_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{F}'_X$ uniformément pour
 η borné, si ξ parcourt l'enveloppe convexe d'un nombre fini

de points de Γ).

3) Transformation de Laplace sur $\mathcal{S}'_X(\Gamma)$.

Soit Γ un ensemble convexe non vide de Ξ^n . Pour ξ fixé dans Γ , cherchons la transformée de Fourier de $\exp(-\xi x) T_x$, considérée comme distribution en x ; nous écrirons cette transformée de Fourier comme une distribution en $\eta \in \mathcal{S}'_\eta(\eta \in \Xi^n)$ dépendant du paramètre $\xi \in \Gamma$, soit :

$$(E(\xi))_\eta = \frac{\left[\mathcal{F}_{(x)} (\exp(-\xi x) T_x) \right]_\eta}{}$$

(C'est la fonction $\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-(\xi + i\eta)x] T_x dx$, si cette intégrale, a un sens, i.e. : si $\exp[-(\xi + i\eta)x] T_x$ est dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$).

Définition - Cette application $\xi \longrightarrow (E(\xi))_\eta$ de Γ dans $\mathcal{S}'_\eta$ s'appelle la transformée de Laplace de $T \in \mathcal{S}'_X(\Gamma)$ et se note $(\mathcal{L} T(\xi))_\eta$ ou plus simplement $\mathcal{L} T$.

4) Théorème sur les supports.

Soient T_x une distribution, $\Gamma \in \Xi^n$ l'ensemble convexe attaché à T , supposé non vide et $\xi_0 \in \Gamma$. Pour que le support de T soit contenu dans le demi-espace $\xi x \gg A$, $\xi \in \Xi^n$, il faut et il suffit que quel que soit $B < A$ la distribution $\exp(Bt) \exp[-(\xi_0 + t\xi)x] T_x \in \mathcal{S}'_X$ quel que soit $t \gg 0$ réel et y reste bornée pour $t \gg 0$.

II. - Espaces E et V .

On donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω , à support compact, et soit $\mathcal{D}'(\Omega)$ son dual, espace des distributions sur Ω .

On donne ensuite un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E , avec $\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}'$. Les injections de $\mathcal{D}$ dans E et de E dans $\mathcal{D}'$ étant continues et $\mathcal{D}$ dense dans E . Toute forme linéaire continue sur E , soit T , définit par restriction une forme linéaire continue $\tilde{T}$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc une distribution sur Ω . On peut identifier E' , dual de E , à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$: on a $\mathcal{D} \subset E' \subset \mathcal{D}'$, les injections étant continues et $\mathcal{D}$ faiblement dense dans E' .

Lorsque E est un espace de Hilbert, il y a un isomorphisme canonique de E sur E' (cependant on n'identifie E et E' que si $E \equiv \mathcal{L}^2$).

On donne aussi un espace de Hilbert V ($V \subset E$)
 $\implies \mathcal{D} \subset V \subset E \subset \mathcal{D}'$.

L'espace V n'est pas, en général, muni de la topologie induite par E , même lorsque celui-ci est un espace de Hilbert ; $\mathcal{D}$ n'est pas nécessairement dense dans V (Lorsque $\mathcal{D}$ est dense dans V , on peut prendre $E = V$).

III. - Forme sesquilinéaire.

On donne sur V une forme linéaire en u semi-linéaire en v , continue sur $(V \times V)$: $u, v \longrightarrow ((u, v))$.

Si $v = \varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \longrightarrow ((u, \varphi))$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}$ donc ;

$$\underline{((u, \varphi)) = \langle Du, \bar{\varphi} \rangle}$$

Cela définit $Du \in \mathcal{D}'$, et une application linéaire continue $u \longrightarrow Du$ de V dans $\mathcal{D}'$
 $\implies D \in \mathcal{L}(V; \mathcal{D}')$.

Exemple - Soit $V \equiv H^1(\Omega)$ (i.e. : espace des fonctions u qui sont dans $\mathcal{L}^2$ ainsi que toutes leurs dérivées du 1^{er} ordre, au sens distribution)

On le norme comme suit :

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

$\implies$ alors H^1 est un espace de Hilbert.

Pour $u, v \in H^1(\Omega)$ posons :

$$((u, v)) = \sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathcal{L}^2} + a(u, v)_{\mathcal{L}^2} \quad (a = \text{constante})$$

Alors, si $v = \varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$((u, \varphi)) = \langle (-\Delta + a)u, \bar{\varphi} \rangle$$

Donc : $D = -\Delta + a$.

Définition 1 - La forme $((u, v))$ étant donné, l'opérateur D , défini ci-dessus, sera dit l'opérateur défini par $((u, v))$, réciproquement la forme $((u, v))$ est dite attachée à D .

Il est utile de décomposer $((u, v))$ en parties hermitienne et antihermitienne :

$$\begin{cases} ((u, v))_1 = \frac{1}{2} \left[((u, v)) + \overline{((u, v))} \right] \\ ((u, v))_2 = \frac{1}{2i} \left[((u, v)) - \overline{((u, v))} \right] \end{cases}$$

$$\implies ((u, v)) = ((u, v))_1 + i((u, v))_2$$

$((u, v))_1$ et $((u, v))_2$ définissent D_1 et D_2 éléments de

$\mathcal{L}(V; \mathcal{D}')$ avec :

$$D = D_1 + i D_2$$

Définition 2 - La forme $((u, v))$ est dite "elliptique" si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que quel que soit

$u \in V$ on ait :

$$((u, v))_1 \geq \alpha \|u\|_V^2$$

Dans ce cas l'opérateur D sera dit :

$$\underline{((u, v)) \text{ -elliptique}}$$

IV. - Espaces $\mathcal{X}$ et N -

On désigne par $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions $u \in V$ telles que Du soit dans E' , muni de la topologie la moins fine qui rende continues les applications $u \longrightarrow u$, $u \longrightarrow Du$ de $\mathcal{X}$ dans V et de $\mathcal{X}$ dans E' respectivement.

On désigne par N le sous-espace de $\mathcal{X}$ formé des u telles que

$$\underline{\langle Du, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \text{ quel que soit } v \in V.}$$

(Le 1er crochet désigne la dualité entre E et E'). L'espace N est muni de la topologie induite par $\mathcal{X}$, c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{X}$.

N.B. - Si $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V , on n'a pas en général

$$\langle Du, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \text{ pour } u \in \mathcal{X} \text{ et } v \in V; \text{ on pose}$$

alors :

$$\langle Du, \bar{v} \rangle = ((u, v)) + R(u, v) \quad u \in \mathcal{X}, v \in V$$

Dire que u est dans N c'est dire que $R(u, v) = 0$ quel que soit $v \in V$.

On a là une formule analogue à une "formule de Green"

V. - Un problème particulier

Dans tout ce qui suit, D sera un opérateur différentiel elliptique.

On rappelle que D est elliptique si étant données S et $T \in \mathcal{D}'$ telles que $DS = T$, S est indéfiniment différentiable dans tout ouvert où T est indéfiniment différentiable.

On a le théorème suivant :

Théorème - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différentiel à coefficients constants soit elliptique est qu'il existe une solution élémentaire qui soit une fonction indéfiniment différentiable dans l'ouvert complémentaire de l'origine.

Exemple - $\Delta = \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est elliptique

en effet : E définie comme suit est solution élémentaire de Δ .

$$E = \begin{cases} \frac{-1}{n-2} & \frac{1}{S_n} & \frac{1}{r^{n-2}} & n \neq 2 \\ \frac{-1}{2\pi} & \log \frac{1}{r} & & n = 2 \end{cases}$$

où $r = \sqrt{\sum x_i^2}$, $S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ est l'aire de la sphère unité dans R^n .

E est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine

$$\implies \underline{\Delta \text{ est elliptique}} .$$

1°) Du point de vue classique :

Soit l'opérateur : $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} D + D)$. On cherche $u(t)$ 2 fois continûment différentiable dans $t \geq 0$, $u \in E$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad t \longrightarrow u(t) \text{ est une fois continûment différentiable de } t \geq 0 \text{ dans } N . \\ \textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} Du + Du = f . \\ \textcircled{3} \quad u(t) \longrightarrow u_0 , \quad u'_t \longrightarrow u_1 \text{ si } t \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

Exemples - ① : Prenons $V = H^1$, $\Omega = \mathbb{R}^n$.

$$((u, v)) = \sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathcal{L}^2}, \quad u, v \in H^1$$

Prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} ((u, \varphi)) &= \sum_1^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_1^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \sum_1^n \left\langle - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \bar{v} \right\rangle \\ &= \left\langle - \Delta u, \bar{v} \right\rangle \\ &= \left\langle D u, \bar{v} \right\rangle \end{aligned}$$

Donc il vient $D = - \Delta$.

Alors le problème précédent revient à trouver u solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u = f$$

$u \in E$ (à L^2 par exemple).

$u(x, t)$ définie pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, et telle que :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

On retombe sur un problème qui sera étudié plus loin.

② Soient $V = H^m$, $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$H^m = \left\{ v \in \mathcal{L}^2 ; \begin{array}{l} D^p v \in \mathcal{L}^2 \\ |p| \leq m \end{array} \right\}$$

On norme H^m comme suit :

$$\|u\|_{H^m}^2 = \sum_{|p| \leq m} \int_{R^n} |D^p u|^2 dx .$$

Alors H^m est un espace de Hilbert .

a) m pair

Prenons alors pour $u, v \in H^m$:

$$\begin{aligned} ((u, v)) &= \left(\Delta^{\frac{m}{2}} u, \Delta^{\frac{m}{2}} v \right)_{\mathcal{L}^2} \\ &= \int_{R^n} \Delta^{\frac{m}{2}} u \cdot \Delta^{\frac{m}{2}} \bar{v} dx . \end{aligned}$$

Alors si $v = \varphi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} ((u, \varphi)) &= \int_{R^n} \Delta^{\frac{m}{2}} u \cdot \Delta^{\frac{m}{2}} \bar{\varphi} dx \\ &= \left\langle \Delta^{\frac{m}{2}} u, \Delta^{\frac{m}{2}} \bar{\varphi} \right\rangle \\ &= (-1)^m \left\langle \Delta^m u, \bar{\varphi} \right\rangle \\ &= \left\langle Du, \bar{\varphi} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } D = (-1)^m \Delta^m .$$

b) m impair

Prenons alors pour $u, v \in H^m$.

$$\begin{aligned} ((u, v)) &= \sum_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} u \right], \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} v \right] \right)_{\mathcal{L}^2} \\ &= \sum_1^n \int_{R^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} u \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} \bar{v} \right] \right) dx \end{aligned}$$

Alors pour $v = \varphi \in \mathcal{D}$,

$$((u, \varphi)) = \sum_1^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} u \right] , \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Delta^{\frac{m-1}{2}} \bar{\varphi} \right] \right\rangle$$

$$((u, \varphi)) = (-1) \sum_1^n \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Delta^{\frac{m-1}{2}} u , \Delta^{\frac{m-1}{2}} \bar{\varphi} \right\rangle$$

$$= (-1) \left\langle \Delta^{\frac{m+1}{2}} u , \Delta^{\frac{m-1}{2}} \bar{\varphi} \right\rangle$$

$$= (-1)^m \left\langle \Delta^m u , \bar{\varphi} \right\rangle$$

$$= \langle Du , \bar{\varphi} \rangle$$

$$\text{Donc } D = (-1)^m \Delta^m .$$

Malheureusement, les problèmes ainsi posés ne se résolvent pas très bien $\implies$ il est important d'introduire des problèmes généralisés. On utilise pour cela, les distributions à valeurs vectorielles.

2) Distributions à valeurs vectorielles

Soit L un espace de Banach, on désigne par $\mathcal{D}'(t, L)$ l'espace des distributions en t à valeurs dans L , défini comme suit :

$\mathcal{D}'(t, L) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(t); L)$, espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(t)$ dans L .

$\mathcal{L}(\mathcal{D}(t); L)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}(t)$ (Pour $L = \mathbb{C}$ on retrouve les distributions en t ordinaires).

Toute fonction $t \longrightarrow u(t)$ continue de t dans L , définit une distribution de $\mathcal{D}'(t, L)$ par :

$\langle u, \varphi \rangle = \int u(t) \varphi(t) dt$, intégrale à valeurs dans L , $\varphi \in \mathcal{D}(t)$. Si T est quelconque dans $\mathcal{D}'(t, L)$ on définit sa dérivée distribution d'ordre k par

$$\langle \frac{\partial^k T}{\partial t^k}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} \rangle$$

Le support en t de T est défini comme dans le cas scalaire.

On peut alors transformer le problème donné en 1). Introduisons la fonction $\overset{n}{u}$ de t à valeurs dans N définie par :

$$\overset{n}{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Si le problème posé admet une solution $u(t) \longrightarrow u_0$ dans N lorsque $t \longrightarrow 0$ et $\overset{n}{u}$ définit bien une distribution de $\mathcal{D}'(t, N)$.

On considère $\overset{n}{u}$ comme élément de $\mathcal{D}'(t, N)$, La dérivée distribution en t de $\overset{n}{u}$ est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \overset{n}{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \delta \otimes u_0$$

$$\text{où } \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

On considère $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n$ comme élément de $\mathcal{D}'(t, N)$ et $\delta \otimes u_0$ est la distribution de $\mathcal{D}'(t, N)$ définie par :

$$\langle \delta \otimes u_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \cdot u_0$$

$$\text{De même : } \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^N + \delta' \otimes u_0 + \delta \otimes u_1 .$$

Alors le problème posé en 1) devient : Chercher $\tilde{u}$ solution de :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} D \tilde{u} + D \tilde{u} = \tilde{f}^N + \delta' \otimes u_0 + \delta \otimes (u_1 + D u_0)$$

$\tilde{u}$ étant nulle pour $t < 0$ et en outre $\tilde{u}$ étant convenablement différentiable en t , pour $t > 0$ (au sens fonction). Si on laisse tomber cette condition : le problème se présente ainsi : Trouver v dans $\mathcal{D}'(t, N)$ solution de :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} D v + D v = \tilde{f}^N + \delta' \otimes u_0 + \delta \otimes (u_1 + D u_0)$$

v étant nulle pour $t < 0$.

Désignons maintenant par $\mathcal{D}'_+(t, L)$ l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(t, L)$, de support en t limité à gauche, i.e : T est nulle pour $t < a(T)$. On munit $\mathcal{D}'_+(t, L)$ d'une topologie plus fine que celle induite par $\mathcal{D}'(t, L)$; on prend $\mathcal{D}'_+(t, L) = \mathcal{D}(\mathcal{D}_-(t) ; L)$ où $\mathcal{D}_-(t)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables scalaires de support en t limité à droite.

3) Problème mixte généralisé

On cherche une distribution $u \in \mathcal{D}'_+(t, N)$ telle que :

$$D u + \frac{\partial}{\partial t} D u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T$$

où T est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t, E)$

VI. - Théorème général.

Nous prenons maintenant $E = \mathcal{L}^2$. (il suffirait de supposer $E \subset \mathcal{L}^2 \subset E'$ les inclusions étant prises au sens large) on a toujours $\mathcal{D} \subset V \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{D}'$.

On fait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (H_1) \quad D \text{ est hermitien} \implies ((u, v)) = ((u, v))_1 \\ (H_2) \quad \text{Il existe } \alpha > 0 \text{ et } C > 0 \text{ tels que pour } u \text{ quelconque} \\ \in V, \quad ((u, u)) + \alpha \langle u, \bar{u} \rangle \geq C \|u\|_V^2. \end{array} \right.$$

Théorème - Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) l'opérateur

$D + \frac{\partial}{\partial t} D + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+(t, N)$ sur $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}^2)$.

Démonstration -

1°) On désigne par p une variable complexe $p = \xi + i\eta$, on va d'abord montrer ceci : il existe ξ_0 tel que pour $\xi > \xi_0$:

$[(p+1) D + p^2]$ soit un isomorphisme de N sur $\mathcal{L}^2$.

Soit en effet f donnée dans $\mathcal{L}^2$; on cherche u dans N solution de :

$$(p+1) Du + p^2 u = f \quad (1)$$

(N.B. - Cette équation s'obtient par transformation de Laplace en t de l'équation du problème posé au par. précédent)

Ecrivons (1) sous la forme (1')

$$Du + \frac{p^2}{p+1} u = \frac{f}{p+1}$$

Posons $\frac{f}{p+1} = g$ ($g \in \mathcal{L}^2$). Prenons une fonction $v \in V$ quelconque alors :

$$((u, v)) + \frac{p^2}{p+1} \langle u, \bar{v} \rangle = \langle g, \bar{v} \rangle \quad (2)$$

et réciproquement : si $u \in V$ et vérifie (2) quelle que soit $v \in V \implies u \in N$ et est solution de (1'). En effet cela a lieu quelle que soit $v = \bar{\varphi} \in \mathcal{D}$.

$$\text{Or : } ((u, \varphi)) = \langle Du, \bar{\varphi} \rangle$$

$$(2) \implies \langle Du + \frac{p^2}{p+1} u, \bar{\varphi} \rangle = \langle g, \bar{\varphi} \rangle$$

$$\text{D'où } Du + \frac{p^2}{p+1} u = g \implies u \in \mathcal{X}.$$

$$\text{Mais alors } \langle Du, \bar{v} \rangle = \langle g, \bar{v} \rangle = ((u, v))$$

quelle que soit $v \in V \implies u \in N$.

Donc tout revient à résoudre (2). Ecrivons (2) sous la forme équivalente :

$$(3) \quad ((u, v)) + \alpha \langle u, \bar{v} \rangle + \left(\frac{p^2}{p+1} - \alpha \right) \langle u, \bar{v} \rangle = \langle g, \bar{v} \rangle$$

Posons alors pour $u \in V$:

$$(u, v)_{\mathcal{G}} = ((u, v)) + \alpha \langle u, \bar{v} \rangle \quad (4)$$

L'hypothèse $(H_2) \implies (u, v)_{\mathcal{G}}$ définit sur V un produit scalaire hilbertien de norme correspondante à $\|u\|_V$.

Si g est donnée dans $\mathcal{L}^2$, $v \longrightarrow \langle g, \bar{v} \rangle$ qui est une forme semi-linéaire continue sur V s'écrit :

$$\langle g, \bar{v} \rangle = (Jg, v)_{\mathcal{G}}.$$

Cela définit J élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; V)$. Désignons par J_1 la restriction de J à V . $J_1 \in \mathcal{L}(V; V)$. J_1 est un opérateur hermitien > 0 pour la structure $(u, v)_{\mathcal{G}}$.

En effet, comme $E = \mathcal{L}^2 : \implies \langle u, \bar{u} \rangle = \|u\|_2^2 \geq 0$

$$(3) \text{ s'écrit alors : } \underline{\Lambda(p) u = Jg} \quad (5)$$

$$\text{où } A(p) = 1 + \left(\frac{p^2}{p+1} - \alpha \right) J_1 \in \mathcal{L}(V; V) \quad (6)$$

$$\text{Posons } q = \frac{p^2}{p+1} - \alpha \quad (p = \xi + ih)$$

$$q + \alpha = \frac{(\xi + ih)^2}{\xi + 1 + ih} = \frac{\xi^2 - h^2 + 2i\xi h}{\xi + 1 + ih}$$

$$q + \alpha = \frac{(\xi + 1)(\xi^2 - h^2) + 2\xi h^2 + i(\dots)}{(\xi + 1)^2 + h^2}$$

$$\text{Re}(q + \alpha) = \frac{\xi^2(\xi + 1) + (\xi - 1)h^2}{(\xi + 1)^2 + h^2}$$

$$\text{Posons alors : } \begin{cases} h^2 = x \implies x \geq 0 \\ y = \frac{\xi^2(\xi + 1) + (\xi - 1)x}{(\xi + 1)^2 + x} \end{cases}$$

$$y' = \frac{[(\xi + 1)^2 + x](\xi - 1) - [\xi^2(\xi + 1) + (\xi - 1)x]}{[(\xi + 1)^2 + x]^2}$$

$$y' = \frac{x \{ (\xi - 1) - (\xi - 1) \} + (\xi + 1)^2(\xi - 1) - \xi^2(\xi + 1)}{[(\xi + 1)^2 + x]^2}$$

$$y' = \frac{(\xi + 1) \{ \xi^2 - 1 - \xi^2 \}}{[(\xi + 1)^2 + x]^2} = - \frac{\xi + 1}{[(\xi + 1)^2 + x]^2}$$

$$\implies y' < 0 \quad \text{quel que soit } x \text{ pour } (\xi + 1) > 0. \text{ Donc}$$

pour $(\xi + 1) > 0$ y est constamment décroissante

$$\implies y > \lim_{x \rightarrow \infty} y = \xi - 1$$

Donc $y > \xi - 1$.

Donc $\text{Re}[q] > (\xi - 1 - \alpha)$ quel que soit h :

$$\text{Re}[q] \longrightarrow +\infty \quad \text{si } \xi \longrightarrow +\infty$$

Comme J_1 est un opérateur hermitien $> 0 \implies A(p)$ est .

inversible pour ξ assez grand (pour $\xi > \xi_0$ convenable).

On a pour $\xi > \xi_0$:

$$\|A(p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V;V)} \leq \text{pol. } |p| .$$

(pol $|p|$ désigne un polynôme en $|p|$ à coefficients positifs).

Par conséquent (1') qui équivaut à (5), a une solution unique:

$$u = \underline{G(p) g} . \quad (7)$$

avec $G(p) = A(p)^{-1}J$ (8) .

Pour $\xi > \xi_0$ G est dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)$

En effet : G définit à priori un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; V)$ et G

opère linéairement de $\mathcal{L}^2$ dans N G est continue : car si

$f \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{L}^2$, $u = G. \frac{f}{p+1} \longrightarrow 0$ dans V

et $Du + \frac{p^2}{p+1} u = \frac{f}{p+1} \longrightarrow 0$ dans N

$\longrightarrow G(p) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)$.

De plus on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D + \frac{p^2}{p+1}) G(p) = 1 \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathcal{L}^2; \mathcal{L}^2) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(p) (D + \frac{p^2}{p+1}) = 1 \quad \text{dans } \mathcal{L}(N; N) \end{array} \right. \quad (10)$$

2°) Maintenant :

$$\|A(p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V;V)} \leq \text{pol } |p| \implies \|G(p)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; V)} \leq \text{pol } |p| .$$

$$(1') \implies \|Du\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^2} + \left| \frac{p^2}{p+1} \right| \|u\|_{\mathcal{L}^2}$$

Donc :

$$\|G(p)\|_{\mathcal{L}'(\mathcal{L}^2; N)} \leq \text{pol } |p| \quad (11)$$

pour $\xi > \xi_0$.

Comme pour $\xi > -1$, l'application $p \longrightarrow D + \frac{p^2}{p+1}$ est holomorphe du plan complexe des p à valeurs dans $\mathcal{L}(N; \mathcal{L}^2)$ on déduit de (11) que $p \longrightarrow G(p)$ est holomorphe du demi-plan $\xi > \xi_0$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)$. De (11) résulte que la fonction :

$h \longrightarrow \|G(\xi + i h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)}$ est à croissance lente, uniformément pour $\xi \in K$ compact de $\xi > \xi_0$; par conséquent la fonction $p \longrightarrow G(p)$ est la transformée de Laplace en t d'une distribution $\mathcal{G}$, élément de :

$$\mathcal{D}'(t, \mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)) \text{ telle que :}$$

$$\exp(-\xi t) \mathcal{G} \in \mathcal{S}'(t, \mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N)) \text{ pour } \xi > \xi_0$$

Remarque - $\mathcal{S}'(t, L)$ est l'espace des distributions tempérées en t à valeurs dans L (espace de Banach)

$$\mathcal{S}'(t, L) = \mathcal{L}(\mathcal{S}(t); L).$$

De (11) il vient finalement d'après le théorème sur les supports de la transformation de Laplace (cf. I) que :

$$\mathcal{G} \text{ est nulle pour } t < 0.$$

Plus simplement : $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{L}^2; N))$ (12)

Les relations (9) et (10) par transformation de Laplace inverse donnent le théorème.

Corollaire 1 - Sous les mêmes hypothèses, le problème mixte

généralisé posé ci-dessus admet une solution unique dépendant continûment de T .

Corollaire 2 - Si T admet une transformée de Laplace en t , alors on est sûr que u peut être calculée par une transformation de Laplace en t .

UN PROBLEME RESOLU EXPLICITEMENT

I. - Position du problème -

1°) - Soit l'opérateur aux dérivées partielles

$$A = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta - \Delta \right) \quad \left(\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)$$

On cherche $u(x,t)$ solution de $Au = f(x,t)$ (1)

pour $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \quad (2) \quad (\text{Cauchy})$$

2°) - Nous avons vu dans la théorie générale (cf. V) que si nous prenions pour espace V , H^1 et pour forme $((u,v))$ la forme

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathcal{L}^2}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

l'opérateur D attaché à la forme $((u,v))$ était $(-\Delta)$.

Donc d'après les préliminaires si $((u,v))$ satisfait aux hypothèses (H_1) et (H_2) et si $f(x,t)$ admet une transformée de Laplace en t , nous serons sûrs que le problème a une solution unique que l'on peut calculer par transformation de Laplace en t .

3°) Vérifions les hypothèses (H_1) et (H_2)

L'hypothèse (H_1) est immédiatement vérifiée $((u,v))$ étant évidemment hermitienne.

Transcrivons (H_2) ; il faut exhiber 2 constantes α et $C > 0$ telles que :

$$\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \alpha \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C \|u\|_{H^1}^2.$$

$$\text{Or : } \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \sum \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

$\implies (H_2)$ est automatiquement vérifiée, il suffit de prendre

$C = \alpha > 0$ quelconque. Donc le problème posé a une solution

unique calculable par transformation de Laplace en t , si $f(x,t)$

admet une transformée de Laplace en t : ce que nous supposons réalisé dans la suite.

II. - Transformation du problème

1°) - Ainsi que nous l'avons vu on introduit

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^u = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^u = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Les dérivées au sens distribution par rapport à t de $\tilde{u}$ sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^u + u_0(x) \delta$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^u + u_0(x) \delta' + u_1(x) \delta$$

(δ étant évidemment la masse de Dirac en t). Portons cela dans

$$(Au)^u = \tilde{f}^u . \quad \text{Il vient :}$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} + u_0 \delta' + (u_1 - \Delta u_0) \delta$$

2°) On opère une transformation de Laplace en t sur (3)

Posons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t \{ f(x,t) \} = \hat{f}(x, p) \\ \mathcal{L}_t \{ \tilde{u}(x,t) \} = \hat{u}(x, p) \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} p^2 \hat{u} - p \Delta \hat{u} - \Delta \hat{u} &= \hat{f} + p u_0 + (u_1 - \Delta u_0) \\ -(p+1) \Delta \hat{u} + p^2 \hat{u} &= \hat{f} + p u_0 + (u_1 - \Delta u_0) \end{aligned}$$

d'où :

$$- \Delta \hat{u} + \frac{p^2}{p+1} \hat{u} = \frac{\hat{f}}{p+1} + \frac{p}{p+1} u_0 + \frac{1}{p+1} (u_1 - \Delta u_0)$$

Nous obtenons l'équation :

$$(4) \quad - \Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = F(x, p) ,$$

$$\text{avec : } \begin{cases} k = \frac{p}{\sqrt{p+1}} \quad (\text{où } \sqrt{p+1} = 1 \text{ quand } p = 0) \\ F(x, p) = \frac{\hat{f}}{p+1} + \frac{p}{p+1} u_0 + \frac{1}{p+1} (u_1 - \Delta u_0) \end{cases}$$

Donc, d'après la théorie, si nous savons résoudre (4) (i.e. trouver

$\hat{u}$), nous aurons résolu le problème (1) (2) puisque $\tilde{u} = \mathcal{L}_t^{-1} (\hat{u})$

et $\tilde{u} = u$ pour $t \geq 0$.

3°) Si nous connaissons une solution élémentaire E de

$(- \Delta + k^2)$, qui admette une transformée de Laplace inverse, il

nous sera possible de trouver u . En effet : $- \Delta E + k^2 E = \delta$,

$\implies \hat{u} = E * F(x,p)$ est solution de (4).

$$\text{D'où } \tilde{u} = \mathcal{L}_t^{-1} (E * F) = (\mathcal{L}_t^{-1} E) \cdot \mathcal{L}_t^{-1} (F) .$$

Le problème se ramène alors au calcul des transformées inverses de E et F.

Tout d'abord nous savons qu'une solution élémentaire de $(-\Delta + k^2)$ est :

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-k|x|}}{|x|} = E$$

III. - Calcul de $\mathcal{L}_t^{-1} (E) .$

$$1^0) \quad \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-k|x|}}{|x|} \right) = \frac{1}{4\pi |x|} \mathcal{L}_t^{-1} (e^{-k|x|})$$

$$k = \frac{p}{\sqrt{p+1}} . \text{ Posons } u = p + \frac{1}{p+1}$$

$$\implies k^2 = \frac{p^2}{p+1} \quad \text{et} \quad u = \frac{p^2 + p + 1}{p+1}$$

$$\implies u = 1 + \frac{p^2}{p+1} = 1 + k^2 .$$

$$\text{D'où } k = \sqrt{u-1} \text{ (toujours même détermination).}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\frac{p}{\sqrt{p+1}}|x|}}{|x|} \text{ provient de } e^{-\sqrt{p-1}|x|} \text{ de la}$$

$$\text{façon suivante : } \frac{e^{-|x| \sqrt{p-1}}}{|x|} \xrightarrow{(p \longrightarrow p + \frac{1}{p+1})} \frac{e^{-|x| \frac{p}{\sqrt{p+1}}}}{|x|}$$

2°) Essayons d'une manière générale de déduire ce que devient la transformée de Laplace d'une distribution T lorsque $p \longrightarrow p + \frac{1}{p+1} .$

$$\text{Soit } F(p) = \mathcal{L}_t [T] \quad (\text{où } p = \xi + i\eta) .$$

$$F(p) \text{ est holomorphe pour } \xi > \alpha \geq 0$$

$$F(p) \longrightarrow F_*(p) = F\left(p + \frac{1}{p+1}\right)$$

$$\text{Tout d'abord } F_*(p) \text{ est holomorphe pour : } \operatorname{Re} \left\{ p + \frac{1}{p+1} \right\} > \alpha .$$

$$\text{Or } p + \frac{1}{p+1} = \xi + i\eta + \frac{1}{(\xi+1) + i\eta}$$

$$\implies \operatorname{Re} \left[p + \frac{1}{p+1} \right] = \xi + \frac{\xi+1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} > \alpha$$

Cela sera vrai quel que soit η si $\xi > \alpha \geq 0$.

Donc $F_*(p)$ est holomorphe pour $\xi > \alpha$.

Comme : $F(p) = \mathcal{L}(T)$ cela prouve que :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & e^{-\xi t} T \in \mathcal{S}' \quad \text{quel que soit } \xi > 0 \\ \textcircled{2} & T \text{ est nulle pour } t < 0 \end{cases}$$

Alors le théorème sur les supports de la transformation de Laplace

$\implies$ étant donné $\varepsilon > 0$, il existent M_ε et $n_\varepsilon > 0$ tels que :

$$|F(p)| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon \xi} (1 + |\eta|)^{n_\varepsilon}.$$

$$\text{Comme } p + \frac{1}{p+1} = \xi + \frac{\xi+1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} + i\eta \left(1 - \frac{1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \right)$$

$$\text{il vient : } |F_*(p)| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon \left(\xi + \frac{\xi+1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \right)} \left(1 + \left| \eta \left(1 - \frac{1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \right) \right| \right)^{n_\varepsilon}$$

$$\text{or } \frac{\xi+1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} < 1 \quad \text{pour } \xi > 0 \text{ quel que soit } \eta.$$

$$\implies \left| 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \right| < 1 + \frac{1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} < 2$$

Alors comme : $(1 + 2|\eta|)^{n_\varepsilon} < (1 + |\eta|)^{2n_\varepsilon}$, on est sûr que :

étant donné $\varepsilon > 0$, il existent pour $\xi > 0$, M'_ε et n'_ε tels que :

$$|F_*(p)| \leq M'_\varepsilon e^{\varepsilon \xi} (1 + |\eta|)^{n'_\varepsilon}$$

$$\text{Il suffira de prendre : } \begin{cases} M'_\varepsilon = & : e M_\varepsilon \\ n'_\varepsilon = & 2 n_\varepsilon \end{cases}$$

Donc : d'après la réciproque du théorème sur les supports :

$F_*(p) = \mathcal{L}(T_*)$ où T_* vérifie :

$$\begin{cases} (1) & e^{-\xi t} T_* \quad , \quad \text{quel que soit } \xi > 0 \\ (2) & T_* \text{ est nulle pour } t < 0 \end{cases}$$

Si $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. On est sûr que :

$$F_*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\frac{t}{p+1}} f(t) dt.$$

$$\text{Nous avons } \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap} e^{-\frac{a}{p+1}}) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap}) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p+1}})$$

$$\text{or : } \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap}) = \delta(a).$$

$$\text{D'où } \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap} e^{-\frac{a}{p+1}}) = \delta(a) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p+1}})$$

Calculons $\mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p+1}})$. Pour cela nous allons calculer

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p}}) = \mathcal{L}^{-1}(1 - e^{-\frac{a}{p}})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p}}) &= \mathcal{L}^{-1}(1) - \mathcal{L}^{-1}(1 - e^{-\frac{a}{p}}) \\ &= \delta - \mathcal{L}^{-1}(1 - e^{-\frac{a}{p}}) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \mathcal{L}^{-1}(1 - e^{-\frac{a}{p}}) = \sqrt{\frac{a}{t}} J_1(2\sqrt{at}),$$

où J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1.

$$\text{Maintenant si } F(p) = \mathcal{L}(f(t)), \quad F(p+1) = \mathcal{L}[e^{-t} f(t)]$$

$$\implies \mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{a}{p+1}}) = \delta - \sqrt{\frac{a}{t}} e^{-t} J_1(2\sqrt{at}).$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left(e^{-\frac{ap-a}{p+1}} \right) &= \delta(a) * \left[\delta - \sqrt{\frac{a}{t}} e^{-t} J_1(2\sqrt{at}) \right] \\ &= \delta(a) - \sqrt{\frac{a}{t-a}} e^{-(t-a)} J_1(2\sqrt{a(t-a)})\end{aligned}$$

Cela pour $t \geq a$.

En effet : $\delta(a) * f(t) = f(t-a)$

($t \geq a$ car $(t-a) \geq 0$).

$$\mathcal{L}^{-1} \left(e^{-sp} e^{-\frac{s}{p+1}} \right) = \delta(s) - \sqrt{\frac{s}{t-s}} e^{-(t-s)} J_1(2\sqrt{s(t-s)}) \quad t \geq s$$

$$\text{Comme : } \mathcal{L}^{-1} (F_*(p)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} dp \int e^{-pt} e^{-\frac{t}{p+1}} f(t) dt.$$

il vient :

$$\mathcal{L}^{-1} [F_*(p)] = \langle \mathcal{L}^{-1} (e^{-sp} e^{-\frac{s}{p+1}}), f \rangle$$

Soit :

$$\mathcal{L}^{-1} [F_*(p)] = f(x) - \int_x^\infty e^{-(t-x)} \sqrt{\frac{x}{t-x}} J_1(2\sqrt{x(t-x)}) f(t) dt$$

3°) Or la transformée inverse de $e^{-|x|\sqrt{p-1}}$ est connue :

en effet $\mathcal{L}^{-1}(e^{-|x|\sqrt{p-1}}) = e^t \cdot \mathcal{L}^{-1}(e^{-|x|\sqrt{p}})$ et comme

$$\mathcal{L} \left[\frac{x}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] = e^{-x\sqrt{p}} \quad (x > 0)$$

$$\text{il vient : } \mathcal{L}^{-1} \left[e^{|x|\sqrt{p-1}} \right] = e^t \frac{|x|}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Donc il suffit de remplacer dans la formule précédente $f(t)$ par

$$\frac{|x|}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^t.$$

De plus il faudra tout diviser par $4\pi |x|$

Il vient finalement :

$$\mathcal{L}^{-1}(E) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \left[\frac{e^t}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \int_t^\infty J_1(2\sqrt{t(s-t)}) \sqrt{\frac{t}{s-t}} e^{(t-s)} \frac{e^s e^{-\frac{x^2}{4s}}}{s^{3/2}} ds \right]$$

IV. - Solution du problème -

1°) Calcul de $\mathcal{L}_t^{-1}(F(x,p))$ - Nous avons:

$$F(x,p) = \frac{\hat{f}}{p+1} + \frac{p}{p+1} u_0 + \frac{u_1 - \Delta u_0}{p+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{p+1}\right) + u_0 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p+1}\right) + (u_1 - \Delta u_0) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{p+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = f * e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = \delta - e^{-t}$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}^{-1}(F) = f * e^{-t} + u_0(\delta - e^{-t}) + (u_1 - \Delta u_0) e^{-t}$$

2°) Solution du problème - Donc nous obtenons finalement

$$u = \mathcal{L}^{-1}(F) \cdot \mathcal{L}^{-1}(E)$$

$$u = \left[f * e^{-t} + u_0(\delta - e^{-t}) + (u_1 - \Delta u_0) e^{-t} \right] \times \frac{e^t}{8\pi^{3/2}} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{3/2}} - \int_t^\infty J_1(2\sqrt{t(s-t)}) \sqrt{\frac{t}{s-t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{s^{3/2}} ds \right]$$

- BIBLIOGRAPHIE -

J.L. LIONS : Thèse (Acta Math.)

L. SCHWARTZ : [1] Théorie des distributions, t. 1 et 2
Paris, Hermann 1950 et 1951

[2] Transformation de Laplace des distributions, Lund, Tome supplémentaire,
1952 .

[3] Théorie des Distributions à valeurs
vectorielles, à paraître.

VU et APPROUVÉ

NANCY, le : 18 juin 1958

Le Doyen,

E. URION,

Vu et Permis d'Imprimer

NANCY, le 20 juin 1958

Le RECTEUR

Président du Conseil

de l'Université

G. MAYER

